

Erkundung von Kriterien für die Lage von Hoch- und Tiefpunkten einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe der Ableitungen mit GeoGebra in Partner- und Gruppenarbeit

Schwerpunktlernziel der Stunde:

Die Schülerinnen und Schüler sollen Kriterien für die Lage von Hoch- und Tiefpunkten einer ganzrationalen Funktion mit Hilfe der Ableitungen mit GeoGebra in Partner- und Gruppenarbeit erkunden, um anschließend eine Anleitung zur rechnerischen Bestimmung von Hoch- und Tiefpunkten aufstellen zu können.

Einordnung der Stunde in den Kernlehrplan Sek. II, NRW:

In dieser Stunde können die Schülerinnen und Schüler im inhaltlichen Schwerpunkt „Differentialrechnung ganzrationaler Funktionen“ die folgenden inhaltsbezogenen und prozessbezogenen Kompetenzen für die Einführungsphase im Sinne des neuen Kernlehrplans erwerben bzw. festigen:

- Inhaltsbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler...

- ...begründen Eigenschaften von Funktionsgraphen (Monotonie, Extrempunkte) mit Hilfe des Graphen der Ableitungsfunktion.
- ...verwenden* das notwendige Kriterium und das Vorzeichenwechselkriterium zur Bestimmung von Extrempunkten.
*Statt „verwenden“ trifft hier für eine erste Auseinandersetzung der Begriff „erkunden“ zu.
- ...verwenden am Graphen (...) einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen (MSW, S. 24).

- prozessbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler...

- *Problemlösen (Erkunden):* ...erkennen Muster und Beziehungen,
- *Problemlösen (Lösen):* ...wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen,
- *Problemlösen (Lösen):* ...wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus,
- *Problemlösen (Lösen):* ...berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
- *Problemlösen (Reflektieren):* ...beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz,
- *Argumentieren (Vermuten):* ...präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
- *Argumentieren (Begründen):* ...stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (...),

- *Argumentieren (Begründen)*: ...berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung (...)),
- *Kommunizieren (Produzieren)*: ...formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege,
- *Werkzeuge nutzen*: ...nutzen (...) Funktionenplotter, Dynamische Geometrie-Software (...),
- *Werkzeuge nutzen*: ...verwenden (...) digitale Werkzeuge zum Darstellen von Funktionen grafisch (...),
- *Werkzeuge nutzen*: ...nutzen (...) digitale Werkzeuge zum Erkunden und (...) Darstellen (MSW, S. 19-22).

Didaktischer Kommentar zur Unterrichtseinheit mit GeoGebra:

Diese Unterrichtsstunde ist in der Unterrichtseinheit „Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitungen“ angesiedelt. Nachdem in einer vorherigen Unterrichtsreihe Änderungsraten, Ableitungsfunktionen und Ableitungsregeln thematisiert wurden, wird in der aktuellen Unterrichtseinheit der Blick auf den Verlauf und die charakteristischen Punkte eines Graphen gelegt.

Als Einstieg wird ein gegebener Graph mit den intuitiv klaren Begriffen „streng monoton steigend“, „streng monoton fallend“, „Hochpunkt“ und „Tiefpunkt“ versehen, wobei kurz auf den Unterschied zwischen Monotonie und strenger Monotonie eingegangen wird.

Wie von Danckwerts & Vogel (2006, S. 135) vorgeschlagen, wird das Monotoniekriterium als Ankerpunkt für die Behandlung der Funktionsuntersuchungen benutzt. „Es ist eben unmittelbar einleuchtend, dass ein Funktionsgraph, der in jedem Punkt eines Abschnittes einen positiven Anstieg hat, in diesem Abschnitt streng monoton wächst“ (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 136). Auf dieser Grundlage lassen sich dann die Kriterien für Extrem- und Wendepunkte begründen.

Bei der Einführung der Ableitungsregeln wird von den Schülerinnen und Schülern – nachdem bereits die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung als Steigung einer Funktion in einem Punkt behandelt wurde – häufig der Wunsch nach der Klärung der geometrischen Bedeutung der zweiten Ableitung geäußert. Aus diesem Grund kann zusätzlich das Krümmungskriterium vor den Kriterien für die Lage von Extrempunkten behandelt werden, was durchaus Sinn macht, wenn man den Schülerinnen und Schülern direkt die Möglichkeit geben möchte, auch das Verhalten der zweiten Ableitung an einer Extremstelle zu erkunden.

Damit die Schülerinnen und Schüler motiviert sind, ihre Kompetenzen zur selbstständigen Erarbeitung mathematischer Inhalte auszubauen, ist es wichtig, ihnen positive Erlebnisse zu ermöglichen. Insbesondere zum Verständnis der geometrischen Bedeutung der zweiten Ableitung ist es sinnvoll, diese für die Schülerinnen und Schüler gut zu veranschaulichen.

Daher wird zur Einführung des Monotonie- und des Krümmungskriteriums auf das Programm „GeoGebra“ zurückgegriffen. Neben guten, dynamischen Visualisierungsmöglichkeiten sind damit verbundene Hoffnungen, dass die Lernenden motivierter sind, ein besseres Verständnis von mathematischen Problemen erhalten und Zusammenhänge besser verstehen. Weil viel mehr Beispiele betrachtet werden können, wird erkundendes Arbeiten unterstützt (vgl. Greefrath et al., 2010, S. 1). Um reinen Spielereien ohne mathematische Überlegungen vorzubeugen, müssen die Erkundungen durch

klare Arbeitsaufträge begleitet werden. Wenn die grundlegenden Funktionen beherrscht werden, können allmählich auch die Aufgabenstellungen offener gestaltet werden, um individuell verschiedene Erkundungen und Erkenntnisse zu ermöglichen.

Ein weiteres, übergeordnetes Ziel der Arbeit mit GeoGebra in dieser Unterrichtseinheit soll sein, jeden Lernenden in die Lage zu versetzen, ein Werkzeug zielgerichtet und adäquat einzusetzen – auch zu Hause. Dabei ist es von Vorteil, dass GeoGebra mit seiner übersichtlichen und funktionellen Benutzeroberfläche die Bedienung sehr einfach macht und zudem frei verfügbar ist.

Mit den am Franz-Stock-Gymnasium zur Verfügung stehenden iPads können immer zwei Schülerinnen und Schüler zusammenarbeiten und im Anschluss kann ein ausgewähltes Team mit seinem Gerät seine Erkenntnisse vor dem Kurs präsentieren.

Vorteile der Verwendung von GeoGebra auf dem iPad sind die Flexibilität im Umgang mit diesem Gerät und dass Elemente direkt mit dem Finger bearbeitet oder verschoben werden können. Nachteilig wirken sich der kleinere Bildschirm im Vergleich zum PC sowie manchmal nicht einwandfrei funktionierende Eingaben in der noch recht neuen App aus.

Didaktischer Kommentar zur Stunde:

Nach einem kurzen Einstieg im Plenum erkunden die Schülerinnen und Schüler zu zweit Kriterien, die für die genaue Lage von Extrempunkten gelten. Über ihre Erkenntnisse tauschen sie sich dann mit einem anderen Team aus und sie begeben sich gemeinsam auf eine formalere Ebene, indem sie Wenn-Dann-Aussagen formulieren. Am Schluss präsentiert ein Team die Erkenntnisse der Gruppe und die formulierten Wenn-Dann-Aussagen werden verglichen, diskutiert und zusammengefasst.

Zum Einstieg soll ein Kursmitglied vor dem Kurs Hoch- und Tiefpunkte in der GeoGebra-App des iPads so gut wie möglich in einen Graphen eintragen. Dann werden die von der App berechneten Extrempunkte angezeigt. Der Unterschied zwischen den per Hand eingetragenen und den berechneten Punkten soll die Frage aufwerfen, wie die genaue Lage bestimmt werden kann. Dieser Einstieg schafft Transparenz, wirft ein Problem auf, knüpft an Vorwissen an und ist zeitlich effizient.

Nach Malle ist es „einer der größten Fehler des Mathematikunterrichts, dass er zu schnell auf eine formal-regelhaft Ebene aufsteigt und die Dinge auf eine bloß rechnerisch-mechanische Weise erledigt, jedoch versäumt, die dahinter liegenden intuitiven und anschaulichen Vorstellungen zu entwickeln“ (Bicker, 2012). Genau diese Grundvorstellungen zum Zusammenhang von Extrempunkten einer Funktion und deren Ableitung(en) sollen in der Stunde zunächst aufgebaut werden. Nach vom Hofe sind Grundvorstellungen die „Beziehung zwischen mathematischem Inhalt und den Phänomenen der individuellen Begriffsbildung“ (Bicker, 2012). Ziel ist also eine Begriffsbildung der Begriffe „Hochpunkt“ und „Tiefpunkt“.

Begriffsbildung bezeichnet nach Piaget die Konstruktion eines Begriffsinhalts (vgl. Brunner, 2013, S. 94). Diese Aussage enthält zwei wichtige Aspekte. Es geht zum einen um den „Begriffsinhalt“, d. h. nicht nur um den Begriffsnamen, der den Schülerinnen und Schülern seit Beginn der Unterrichtseinheit bekannt ist, sondern darum, „Eigenschaften des Begriffs zu kennen, Beziehungen zu sehen und mit Begriffen arbeiten zu können“ (Bicker, 2012).

Der andere Aspekt ist der des Konstruierens. Nach Piaget sind Kinder von Beginn an aktive Wesen, die produktiv mit ihrer Umwelt umgehen, also durch ihr Tun und ihre Erfahrungen, die sie damit machen,

sich ihre Umwelt aneignen. Für den Unterricht ergibt sich die Konsequenz, dass die Schüler selbst auf die Handlung einwirken müssen, damit sie ihre Denkstrukturen erweitern können (Akkomodation).

Nach dem E-I-S-Prinzip nach Bruner (vgl. Bicker, 2012) ist es sinnvoll, Lernerfahrungen auf drei Repräsentationsebenen stattfinden zu lassen. In dieser Stunde geht es um enaktiv-ikonische Erfahrungen, die die Schülerinnen und Schüler mit Hilfe der Untersuchung der Funktionen in GeoGebra machen können. Erst später erfolgt die Übertragung auf die symbolische Ebene. Durch Erkundungen, die zu den Erfahrungen führen, konstruieren sich die Schülerinnen und Schüler individuell die Begriffe. Auch nach Aebli entsteht Wissen aus Handeln und Definitionen können erst am Ende eines komplexen Begriffsbildungsprozesses stehen (vgl. Barzel, Hußmann & Leuders, 2005, S. 210).

Der Begriffsbildungsprozess erfolgt in dieser Stunde induktiv: Zunächst sammeln die Schülerinnen und Schüler zu zweit Erfahrungen in Form von Erkundungsaufgaben, die recht offen sind und die Begriffsbildung inhaltlich vorbereiten. In einem zweiten Schritt gibt es die konkrete Aufforderung im Anschluss an die Erkundung die Erkenntnisse zu ordnen und zu strukturieren. In einem weiteren Schritt, der zu einem großen Teil erst in der folgenden Stunde stattfinden kann, werden die charakteristischen Merkmale des Begriffs noch verfeinert und in Form einer Definition formuliert. Hier erfolgt die Übertragung auf die symbolische Ebene.

Zusammengefasst folgt der Begriffsbildungsprozess dem Prinzip des genetischen Lernens, da die Zusammenhänge zwischen den Hoch- und Tiefpunkten einer Funktion und ihren Ableitungen nicht als „fertige Mathematik“ an die Schülerinnen und Schüler weitergegeben, sondern von den Lernenden aktiv im Laufe einer Problembearbeitung konstruiert werden (vgl. Barzel, Holzäpfel, Leuders & Streit, 2012, S. 42).

Bei der Strukturierung soll die fundamentale Rolle der Logik für den Aufbau mathematischer Systeme zum Tragen kommen. Mathematische Argumentations- und Begründungsweisen sind logisch gegliedert und mit Hilfe des logischen Vokabulars werden Relationen zwischen Begriffen beschrieben (vgl. Schacht, 2013). Aus diesem Grund sind die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, ihre zunächst angefertigten Notizen in „eigener Sprache“ in Form von Wenn-Dann-Aussagen zusammenzutragen. Denn „am Ende dieses Prozesses stehen dann die sprachlichen Beschreibungen, die im Sinne von Verständlichkeit, logischer Stringenz und begrifflicher Präzision formalisiert werden. Aber auch Beschreibungen in der eigenen Sprache sind sinnvoll und dienen dazu, die unterrichtlich aufgebauten Begriffe im Alltag zur Anwendung zu bringen“ (Barzel et al., 2005, S. 45).

In der Erkundung und Formulierung der Wenn-Dann-Aussagen sind die Schülerinnen und Schüler frei. So können sie über die Monotonie, Krümmung, die Steigung der Tangente, aber auch über das Vorzeichenwechsel-Kriterium oder das Vorzeichen der zweiten Ableitung argumentieren. Das Vorzeichenwechsel-Kriterium als hinreichender Bedingung sowie auch das des Vorzeichens der zweiten Ableitung sollten beide (wenn auch nicht unbedingt in dieser Stunde) thematisiert werden, denn „dem Vorteil der leichteren Anwendbarkeit des zweiten Kriteriums steht der Nachteil der geringeren Reichweite gegenüber: So versagt es bereits beim Aufspüren des Minimums von $f(x) = x^4$ im Nullpunkt“ (Danckwerts & Vogel, 2006, S. 141).

Entsprechend des individuellen Konstruktionsprozesses sollen die Schülerinnen und Schüler durch Tippkarten unterstützt werden, die ihnen bei Bedarf ausgehändigt werden. Differenzierend wirkt darüber hinaus bereits die recht offene Aufgabenstellung.

Auch die Wenn-Dann-Aussagen der „notwendigen Bedingung“ für das Vorhandensein eines Extrempunkts müssen genau thematisiert werden. Hier sind nämlich etwa folgende Schüleraussagen zu erwarten, von denen nur die erste korrekt ist:

„Wenn die Funktion einen Extrempunkt hat, dann ist die Ableitung/Tangentensteigung Null.“

„Wenn die Ableitung/Tangentensteigung Null ist, dann hat die Funktion einen Extrempunkt.“

Letztere kann direkt an der gegebenen Funktion etwa durch dynamisches Verschieben der Tangente durch den Sattelpunkt (dessen Begriff den Schülern bisher nicht bekannt ist) thematisiert werden, wodurch sich erneut die Vorteile der Nutzung eines digitalen Werkzeugs zeigen.

Es zeigt sich auch, dass so bei der Konstruktion eines Begriffes gleich weitere Begriffe, in diesem Fall die der „notwendigen“ und „hinreichenden Bedingung“, mit konstruiert werden.

Das kann aber nicht oder nur ansatzweise in dieser Stunde geleistet werden.

Dazu ist es hilfreich, dass die auf den Plakaten formulierten Wenn-Dann-Aussagen in der nächsten Stunde wieder aufgegriffen werden können.

Letztendlich ist noch hervorzuheben, dass GeoGebra in dieser Stunde ein Mittel zum Zweck der beschriebenen Begriffsbildung ist, weshalb nicht in erster Linie der Umgang mit der App ausgebaut werden soll. Aus diesem Grund und aus Zeitgründen ist die für die Erkundung zu verwendende GeoGebra-Datei bereits für die Schülerinnen und Schüler vorbereitet. Auch wird das Potential des Programms nicht ausgeschöpft, weil etwa keine Funktion mit veränderbaren Parametern gewählt wird. Gerechtfertigt wird dies damit, dass die gewünschten Erfahrungen nur mit einer geeigneten Funktion (die etwa auch einen Sattelpunkt enthält) zielführend und zeiteffizient erreicht werden können. Jederzeit können und sollen die Schülerinnen und Schüler ihre Erkenntnisse an anderen Funktionen überprüfen.

Literatur:

Barzel, B., Holzäpfel, L. Leuders, T. & Streit, C. (2012). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren* (2. Aufl.). Berlin: Cornelsen Schulverlage.

Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (Hrsg.) (2005). *Computer, Internet & Co. im Mathematik-Unterricht*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bicker, U. (2012). *Grundvorstellungen aufbauen mit Lernumgebungen*. Pädagogisches Landesinstitut Rheinland-Pfalz.

Brunner, I (2013). *Innermathematisches Beweisen und Argumentieren in der Sekundarstufe I*. Münster: Waxmann Verlag.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.

Greefrath, G., Hußmann, S. & Fröhlich, I. (2010). Geometrie bewegen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 34, S. 1-8.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (MSW) (Hrsg.) (2013).
Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik.

Schacht, F. (2013). *Was ist (individuelle) mathematische Begriffsbildung? Eine fachdidaktische Perspektive auf mathematischen Sprachgebrauch im Unterricht am Beispiel der Differentialrechnung.*
Dortmund: TU Dortmund, IEEM.

GeoGebra-Datei:

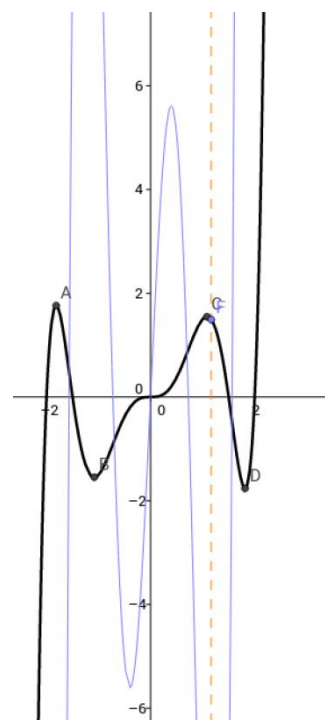
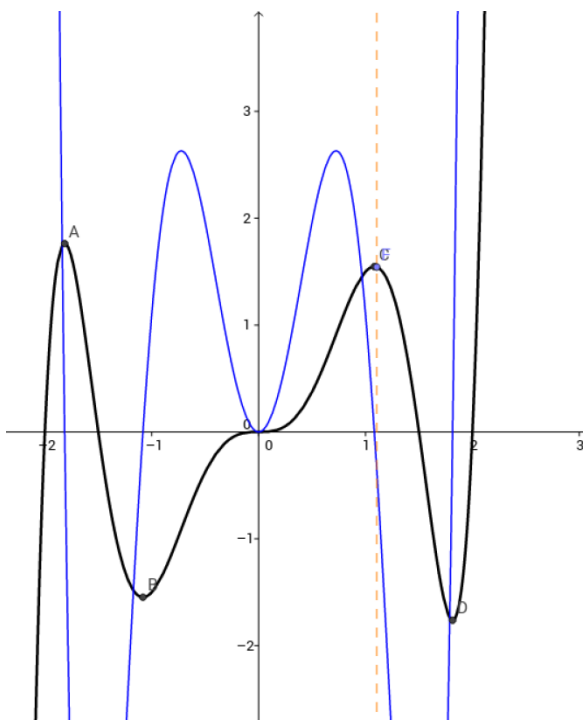
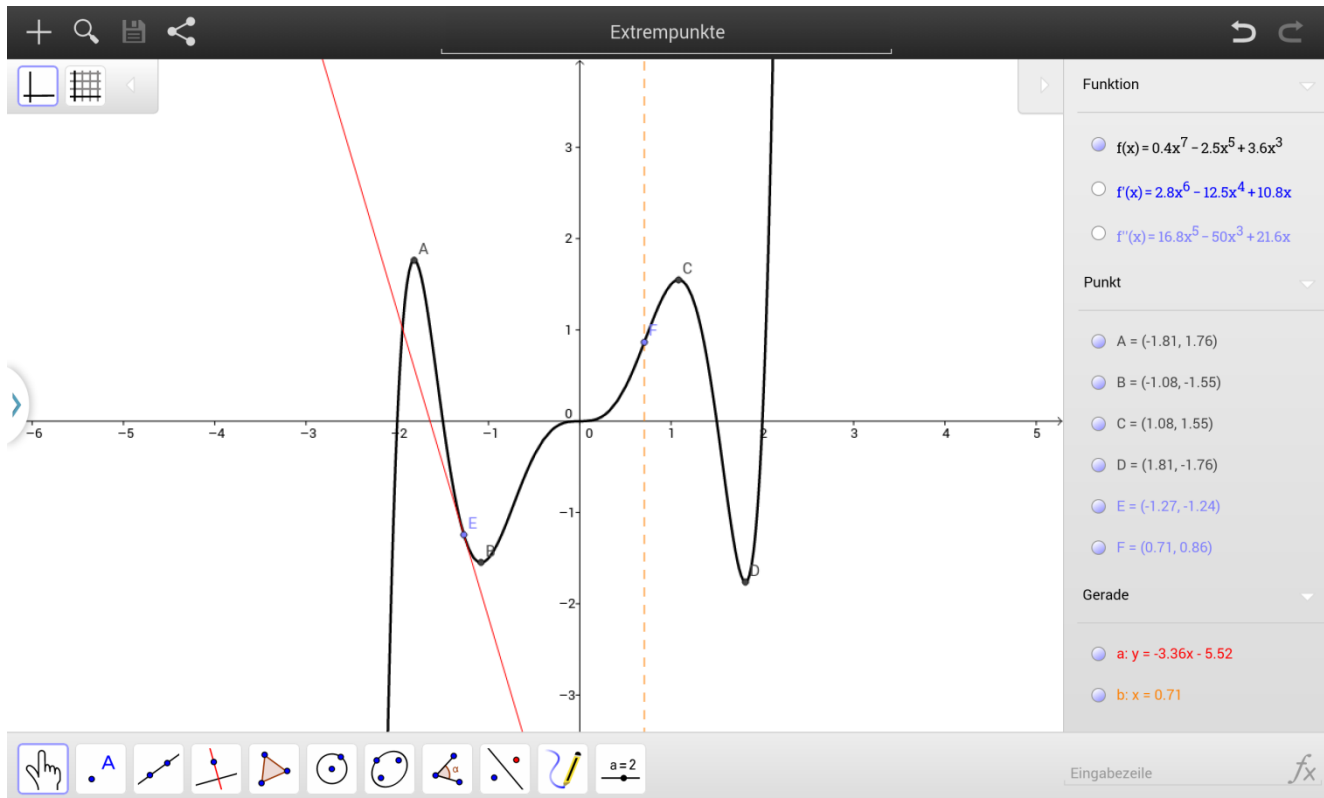
Die GeoGebra-Datei kann in GeoGebra auf dem Tablet, am PC oder unter folgendem Link im Browser geöffnet werden:

<http://tube.geogebra.org/student/mwZiGLoJ3>

Screenshots der GeoGebra-Datei:

Im Folgenden sind drei Screenshots der GeoGebra-Datei zu sehen.

Es sind der Graph der gegebenen Funktion sowie eine Tangente an den Graphen dargestellt. Als weiteres Hilfsmittel steht den Schülerinnen und Schülern eine verschiebbare Senkrechte zur x -Achse zur Verfügung, die an die Extremstellen geschoben werden kann, um diese auf der x -Achse zu kennzeichnen. Darüber hinaus lassen sich die Graphen der ersten und der zweiten Ableitung der Funktion einblenden (siehe untere Bilder). Alle Elemente können aktiviert und deaktiviert werden.



Tipps zur Erkundung:

Schaut euch in der Umgebung der Extrempunkte das **Verhalten der Tangente** an. Was passiert in den Extrempunkten? Gibt es einen Unterschied zwischen Hoch- und Tiefpunkten?

Berücksichtigt den Zusammenhang zwischen der Steigung der Tangente und der 1. Ableitung.

Schaut euch in der Umgebung der Extrempunkte den **Verlauf der 1. Ableitung** an. Was passiert in den Extrempunkten? Gibt es einen Unterschied zwischen Hoch- und Tiefpunkten?

Schaut euch in der Umgebung der Extrempunkte den **Verlauf der 2. Ableitung** an. Gibt es einen Unterschied zwischen Hoch- und Tiefpunkten?

Erinnerung: Die 1. Ableitung f' sagt etwas über die Monotonie der Funktion f aus.

Erinnerung: Die 2. Ableitung f'' sagt etwas über die Krümmung der Funktion f aus.

Verlaufsplanung der Unterrichtsstunde:

Phase	Inhaltliche Schwerpunkte	Sozialform/ Methoden	Medien	Didaktisch-methodischer Kommentar
Anknüpfung & Problemvorbereitung	<p>Anknüpfung an das Vorwissen der SuS über Hoch- und Tiefpunkte</p> <ul style="list-style-type: none"> Hoch- und Tiefpunkte durch SoS in den Graphen der gegebenen Funktion $f(x) = 0,4x^7 - 2,5x^5 + 3,6x^3$ eintragen lassen Vergleich mit den von GeoGebra ausgegebenen Extrempunkten 	Plenum: SB, UG	iPad mit GeoGebra	Der Einstieg schafft Transparenz, wirft ein Problem auf, knüpft an Vorwissen an (die SuS kennen Hochpunkte und Tiefpunkte bisher nur als „höchste“ bzw. „tiefste“ Punkte in einer Umgebung) und ist zeitlich effizient. Die Tatsache, dass offenbar nach bestimmten Kriterien die genaue Lage der Punkte bestimmt werden kann, führt direkt zur zu bearbeitenden Problemstellung.
Problemformulierung	<i>Welche Kriterien gelten für die genaue Lage von Hoch- und Tiefpunkten?</i>	Plenum: LI		Die Formulierung der Problemstellung knüpft direkt an den Einstieg an und leitet die Erarbeitungsphase ein.
Problembearbeitung	Kriterien, die für alle Extrempunkte gelten sowie solche, die nur für Hoch- bzw. nur für Tiefpunkte gelten, suchen	PA	iPad mit GeoGebra, AB, Tippkarten	Damit jede Schülerin bzw. jeder Schüler Entdeckungen mit Hilfe der GeoGebra-App machen kann, werden die ersten Erkundungen in PA durchgeführt. Die Aufgabenstellung für diese Phase ist gezielt offen gehalten, um die SuS in ihrem Erkundungsprozess nicht einzuengen und möglichst viele Erkenntnisse zu erhalten. So wirkt die Aufgabenstellung von sich aus bereits differenzierend. Unterstützt werden die SuS je nach individuellem Vorgehen mit Hilfe von Tippkarten vom L, um ihren Blick auf einen bestimmten Aspekt zu lenken. Da die Tippkarten lediglich eine Fokussierung auf die wesentlichen Beobachtungen enthalten, arbeiten die SuS weiterhin selbstständig. Gleichzeitig wird der Forderung nach einer inneren Differenzierung

<p style="text-align: center;">Problem- bearbeitung</p>				<p>Rechnung getragen.</p>
	<p>Wenn-Dann-Aussagen auf der Grundlage der gefundenen Kriterien formulieren</p> <p><u>Mögliche Schülerlösungen:</u></p> <ul style="list-style-type: none"> • Wenn die Funktion einen Extrempunkt hat, dann ändert sich die Monotonie der Funktion. • Wenn die Funktion einen Extrempunkt besitzt, dann ist die Ableitung/Tangentensteigung Null. • Wenn die Ableitung/Tangentensteigung Null ist, dann besitzt die Funktion einen Extrempunkt. • Wenn die Ableitung erst negativ und dann positiv ist/einen Vorzeichenwechsel von – nach + hat, dann liegt ein Tiefpunkt vor. (oder umgekehrt) • Wenn die Ableitung erst positiv und dann negativ ist/einen Vorzeichenwechsel von + nach – hat, dann liegt ein Hochpunkt vor. (oder umgekehrt) • Wenn die Funktion einen Hochpunkt hat, dann ist sie rechtsgekrümmt. (oder umgekehrt) • Wenn die Funktion einen Tiefpunkt hat, dann ist die zweite Ableitung größer als Null. (oder umgekehrt) • usw. 	<p>GA</p>	<p>iPad mit GeoGebra, AB</p>	<p>In dieser GA-Phase sollen sich je zwei Teams austauschen, damit jede Schülerin bzw. jeder Schüler auf weitere Aspekte gestoßen wird. Die anschließende Formulierung der Wenn-Dann-Aussagen soll eine strukturierende und ordnende Funktion haben und die SuS an die mathematische Logik heranführen.</p> <p>Bei den hier aufgeführten möglichen Schülerlösungen kann es sich lediglich um Beispiele handeln, weil den Erkundungen und Formulierungen kaum Grenzen gesetzt sind.</p> <p>Der Einsatz symbolischer Schreibweisen (z. B. $f'(x_0) = 0$) durch die SuS ist eher unwahrscheinlich, aber bei leistungsstärkeren SuS ebenfalls möglich.</p>

Problem- bearbeitung	Wenn-Dann-Aussagen auf Plakaten notieren und GeoGebra-Oberfläche für Präsentation vorbereiten	GA	iPad mit GeoGebra, AB, Plakate	Es soll jeweils eine Wenn-Dann-Aussage auf ein Plakat geschrieben werden, damit diese einerseits auch vom hinteren Teil des Raumes gelesen werden kann, wenn sie an der Tafel hängt und damit andererseits die Wenn-Dann-Aussagen an der Tafel geordnet werden können.
	Gültigkeit der Wenn-Dann-Aussagen an selbst gewählten Beispielen überprüfen	GA	iPad mit GeoGebra, AB	Die Überprüfung der Wenn-Dann-Aussagen an selbst gewählten Beispielen dient dazu, deren Richtigkeit zu bestätigen (oder zu widerlegen) und zu zeigen, dass diese allgemeingültig sind (oder nicht). Hier zeigt sich das Potential eines Programms wie GeoGebra, bei dem man nicht auf vorgegebene Funktionen beschränkt ist, wie es bei einer Abbildung wäre, sondern das individuelle Eingabemöglichkeiten eröffnet.
	*fakultativ: Anleitung zur rechnerischen Bestimmung von Extrempunkten und Unterscheidung von Hoch- und Tiefpunkten entwickeln	GA	iPad mit GeoGebra, AB	Da auf eine Anleitung zur rechnerischen Bestimmung von Extrempunkten und Unterscheidung von Hoch- und Tiefpunkten hingearbeitet werden soll, sollen sich schnelle Gruppen bereits damit auseinandersetzen, wobei die Ausformulierung HA ist.
Präsentation	Präsentation der Wenn-Dann-Aussagen einer Gruppe mit Hilfe von GeoGebra	Plenum: SV	iPad mit GeoGebra, Plakate	Mit Hilfe von GeoGebra soll die präsentierende Gruppe erläutern, wie sie zu ihren Wenn-Dann-Aussagen gekommen ist. Dies kann SuS helfen, die bisher entweder bereits aus der Anschauung diese Erkenntnisse nicht gewinnen konnten oder die Schwierigkeiten hatten, diese in Wenn-Dann-Aussagen zu formulieren.

	Ergänzung weiterer, ggf. auch kontrastierender, Wenn-Dann-Aussagen durch andere Gruppen	Plenum: SB	iPad mit GeoGebra, Plakate	Weitere Gruppen ergänzen weitere Wenn-Dann-Aussagen, die ggf. auch im Widerspruch zu den zuvor präsentierten stehen, um möglichst viele erkundete Aspekte zu erfassen.
Auswertung	Diskussion ausgewählter Wenn-Dann-Aussagen von den Plakaten und „Abhaken“ richtiger Wenn-Dann-Aussagen	Plenum: UG	Plakate, Kamera	Gerade widersprüchliche Wenn-Dann-Aussagen bieten Diskussionsmöglichkeiten und dadurch Lerngelegenheiten, sodass im Optimalfall solche gegenübergestellt werden können. Ein relevantes Beispiel ist die „notwendige Bedingung“ für Extrempunkte, bei der es auf die richtige Formulierung der Wenn-Dann-Aussage ankommt. Als Ergebnissicherung werden richtige Wenn-Dann-Aussagen „abgehakt“, die in der nächsten Stunde in Form der Plakate wieder aufgegriffen werden können. Damit die SuS die HA bearbeiten können, werden die Plakate mit richtigen Wenn-Dann-Aussagen ab fotografiert und die Fotos den SuS z. B. per E-Mail oder Dropbox zur Verfügung gestellt.

Abkürzungen: Arbeitsblatt (AB), Gruppenarbeit (GA), Hausaufgabe (HA), Lehrer (L), Lehrerimpuls (LI), Partnerarbeit (PA), Schülerbeitrag (SB), Schülervortrag (SV), Schülerin oder Schüler (SoS), Schülerinnen und Schüler (SuS), Unterrichtsgespräch (UG)