

## Entdecken weiterer Ableitungsregeln I (Kettenregel)

Bisher habt Ihr mit der Summen- oder der Produktregel viele Funktionen abgeleitet. Heute lernt Ihr eine weitere Ableitungsregel kennen → die „Kettenregel“.

Natürlich kann auch Euer CAS helfen diese Ableitungen direkt zu berechnen. Aber zuerst sollt Ihr die Regel selbst entdecken.

Gegeben sind die Funktionen  $f : f(x) = (1 + 2x)^7$  und  $g : g(x) = (1 + 3x)^7$ ;  $D_f = D_g = \mathbb{R}$ .

- a.) Überlegt Euch zu erst ohne Verwendung des CAS, wie die jeweilige Ableitungsfunktion lautet, überprüft anschließend Eure Vermutung mit dem CAS. Worin unterscheidet sich Eure Vermutung von der Lösung? Beschreibt diese Unterschiede!

Nun wird schrittweise beschrieben, wie man eine Funktion mit Hilfe der Kettregel ableitet.

- b.) Die Funktion f lässt sich als „Verkettung“ von zwei Funktionen schreiben:

einer **inneren** linearen Funktion  $v(x) = 1 + 2x$  und

einer **äußeren** Potenzfunktion  $u(x) = x^7$

Mathematisch geschrieben heißt dies:  $f(x) = u(v(x)) = u(1 + 2x) = (1 + 2x)^7$

Ergänzt bitte folgende Tabelle.

Äußere Funktion	Innere Funktion	Verkettete Funktion
$u(x) = x^6$	$v(x) = 1 - x$	$f(x) = u(v(x)) = u(1 - x) = (1 - x)^6$
$u(x) = x^3$	$v(x) = x^2 + 1$	$f(x) = u(v(x)) = u(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^3$
$u(x) = x^2 + 1$	$v(x) = x^3$	
		$f(x) = (x + x^2)^5 + 1$
		$f(x) = \sqrt{1 + x^4}$
	$v(x) = \cos x$	$f(x) = \frac{1}{\cos x}$
		$f(x) = \sin(5x + 5)$

Ergänzt die folgende Tabelle und leitet daraus eine mögliche Regel für das Ableiten verketteter Funktionen ab. Notiert diese in Eurem Heft.

Äußere Funktion u	Innere Funktion v	Verkettung $f(x) = u(v(x))$	Ableitungsfunktion u'	Verkettung u'(v(x))	Ableitungsfunktion v'	Ableitungsfkt. f'(x) [mittels CAS]
$u(x) = x^7$	$v(x) = 1 + 2x$	$f(x) = (1 + 2x)^7$				$f'(x) = 7 * (1 + 2x)^6 * 2$
$u(x) = x^8$	$v(x) = 1 + 3x$					
$u(x) = 3 - x^2$	$v(x) = 1 - x$					
$u(x) = 13x^3 - x^2$	$v(x) = 1 - x$					

Merksatz:

---



---



---



---

### Aufgabe 1 Verkettung

Gegeben sind die Funktionen  $u : u(x) = x^2 - 2$  und  $v : v(x) = 5 - \frac{1}{x}$ .

- Bestimme  $u(v(3))$  und  $v(u(3))$ .
- Bestimme nun die Werte von x, für die  $u(v(x)) = v(u(x))$  gilt.
- Bestimme die Werte von x, für die die Verkettung  $u(v(x))$  nicht definiert ist.

### Aufgabe 2 Ist die Verkettung kommutativ?

- Zeige, dass die Verkettung zweier Funktionen im Allgemeinen nicht kommutativ ist, d.h.  $u(v(x)) \neq v(u(x))$ .
- Gebe nun mehrere Beispiele von Funktionen u und v an, deren Verkettung kommutativ ist.