2.1.1 Übersichtsraster Unterrichtsvorhaben der Qualifikationsphase Leistungskurs

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-I:</u>

Thema:
Optimierungsprobleme (Q-LK-A1)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Problemlösen
Inhaltsfeld:
Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
Funktionen als mathematische Modelle
Fortführung der Differentialrechnung
Zeitbedarf: 20 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-II:</u>

Thema:
Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q-LK-A2)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfelder:
Funktionen und Analysis (A)
Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
Funktionen als mathematische Modelle
Lineare Gleichungssysteme
Zeitbedarf: 20 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-III:</u>

Thema: Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-LK-G1)

Zentrale Kompetenzen:
Modellieren
Werkzeuge nutzen
Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Geraden)
Zeitbedarf: 10 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u>

Thema: Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)

Zentrale Kompetenzen:
Problemlösen
Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
Skalarprodukt
Zeitbedarf: 10Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung	
<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-V:*</u> **Thema***:* *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte (Ebenen) **Zeitbedarf:** 10 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-VI:*</u> **Thema:** *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Argumentieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Lagebeziehungen und Abstände (von Geraden) **Zeitbedarf:** 10 Std.
<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-VII*</u> **Thema:** *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)* **Zentrale Kompetenzen:** • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Grundverständnis des Integralbegriffs **Zeitbedarf**: 10 Std.	<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:*</u> **Thema**: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-LK-A4)* **Zentrale Kompetenzen**: • Argumentieren • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt**: • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 20 Std.

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-IX:</u>

Thema: Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Kenngrößen von Wahrscheinlichkeits-verteilungen

Zeitbedarf: 5 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-X:</u>

Thema: Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Binomialverteilung

Zeitbedarf: 10 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q1-XI:</u>

Thema: Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Binomialverteilung

Zeitbedarf: 5 Std
.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Summe Qualifikationsphase (Q1) – LEISTUNGSKURS 130 Stunden</u></td></tr>
</table>

Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS	
Unterrichtsvorhaben Q2-I: **Thema:** *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A5)* **Zentrale Kompetenzen:** • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Fortführung der Differentialrechnung **Zeitbedarf**: 20 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q2-II* **Thema:** *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A6)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren **Inhaltsfeld:** Funktionen und Analysis (A) **Inhaltliche Schwerpunkte:** • Fortführung der Differentialrechnung • Integralrechnung **Zeitbedarf**: 20 Std.
Unterrichtsvorhaben Q2-III: **Thema:** *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S4)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Problemlösen • Werkzeuge nutzen **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Normalverteilung **Zeitbedarf:** 10 Std.	*Unterrichtsvorhaben Q2-IV:* **Thema:** *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)* **Zentrale Kompetenzen:** • Modellieren • Kommunizieren **Inhaltsfeld:** Stochastik (S) **Inhaltlicher Schwerpunkt:** • Testen von Hypothesen **Zeitbedarf:** 10 Std.

<table>
<tr><th colspan="2">Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS Fortsetzung</th></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-V:</u>

Thema: Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Argumentieren

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Stochastische Prozesse

Zeitbedarf: 10 Std.</td><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VI:</u>

Thema: Untersuchungen an Polyedern (Q-LK-G5)

Zentrale Kompetenzen:
• Problemlösen
• Werkzeuge nutzen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
• Lagebeziehung und Abstände (von Ebenen)
• Lineare Gleichungssysteme

Zeitbedarf: 10 Std.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td><u>Unterrichtsvorhaben Q2-VII:</u>

Thema: Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q-LK-G6)

Zentrale Kompetenzen:
• Modellieren
• Problemlösen

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltlicher Schwerpunkt:
• Verknüpfung aller Kompetenzen

Zeitbedarf: 10 Std.</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Summe Qualifikationsphase (Q2) – LEISTUNGSKURS: 90 Stunden</u></td></tr>
</table>

Q1 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	**Thema**	**Stundenzahl**
I	Q-LK-A1	20
II	Q-LK-A2	20
III	Q-LK-G1	10
IV	Q-LK-G2	10
V	Q-LK-G3	10
VI	Q-LK-G4	10
VII	Q-LK-A3	10
VIII	Q-LK-A4	20
IX	Q-LK-S1	5
X	Q-LK-S2	10
XI	Q-LK-S3	5
	Summe:	130
Q2 Leistungskurse		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
I	Q-LK-A5	20
II	Q-LK-A6	20
III	Q-LK-S4	10
IV	Q-LK-S5	10
V	Q-LK-S6	10
VI	Q-LK-G5	10
VII	Q-LK-G6	10
	Summe:	90

Konkretisierte Unterrichtsvorhaben

a) Qualifikationsphase Leistungskurs

Funktionen und Analysis (A)

<u>*Unterrichtsvorhaben Q1-I:*</u>

Thema:
Optimierungsprobleme (Q-LK-A1)

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
- finden und stellen Fragen zu einer gegebenen Problemsituation *(Erkunden)*
- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle …) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Verallgemeinern …) *(Lösen)*
- setzen ausgewählte Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein *(Lösen)*
- berücksichtigen einschränkende Bedingungen *(Lösen)*
  vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*

Zeitbedarf: 20 Std.

Thema: *Optimierungsprobleme (Q-LK-A1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien […] zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • führen Extremalprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese • bilden die Ableitungen weiterer Funktionen o Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten • führen Eigenschaften von zusammengesetzten Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) argumentativ auf deren Bestandteile zurück • wenden die Produkt- und Kettenregel zum Ableiten von Funktionen an	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** *Extrema und Wendepunkte* Die notwendigen und hinreichenden Kriterien für Extrem- und Wendepunkte werden von den Schülerinnen und Schülern erarbeitet und in inner- und außermathematischen Fragestellungen angewendet (die umfasst erstmal nur das Vorzeichenwechselkriterium zur Begründung als auch die Lösung über die höheren Ableitungen) *Einstieg Steckbriefaufgaben* Das Aufstellen einer Funktionsgleichung fördert die Entwicklung von Problemlösestrategien. Dabei werden die fehlenden Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben, bestimmt(„Steckbriefaufgaben“) An Problemen, die auf quadratische Zielfunktionen führen, sollten auch unterschiedliche Lösungswege aufgezeigt und verglichen werden. Hier bietet es sich außerdem an, Lösungsverfahren auch ohne digitale Hilfsmittel einzuüben. *Extremwertprobleme* An mindestens einem Problem entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten (z. B. „Glasscheibe“ oder verschiedene Varianten des „Hühnerhofs“). Ein Verpackungsproblem (z..B. Dose oder Milchtüte) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik untersucht . *Weitere Ableitungsregel* Im Zusammenhang mit geometrischen und ökonomischen Kontexten entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen von Wurzelfunktionen sowie die Produkt- und Kettenregel und wenden sie an.

Unterrichtsvorhaben Q1-II:

Thema:
Funktionen beschreiben Formen – Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q-LK-A2)

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  … Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
  … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
  nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden […], Berechnen und Darstellen

Zeitbedarf: 20 Std.

Thema: *Funktionen beschreiben Formen - Modellieren von Sachsituationen mit Funktionen (Q-LK-A2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben („Steckbriefaufgaben“) • beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mit Hilfe der 2. Ableitung • verwenden notwendige Kriterien und Vorzeichenwechselkriterien sowie weitere hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind	**Leitfrage: „Woher kommen die Funktionsgleichungen?“** Anknüpfend an die Einführungsphase (vgl. Thema E-A1) werden an einem Beispiel in einem geeigneten Kontext (z. B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) die Parameter der Scheitelpunktform einer quadratischen Funktion angepasst. Anschließend werden aus gegebenen Punkten Gleichungssysteme für die Parameter der Normalform aufgestellt. Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen und zur Betrachtung von Wendepunkten. Als Kontext hierzu können z. B. Trassierungsprobleme gewählt werden. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte. Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, deren Angemessenheit zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Damit nicht bereits zu Beginn algebraische Schwierigkeiten den zentralen Aspekt der Modellierung überlagern, wird empfohlen, den GTR zunächst als Blackbox zum Lösen von Gleichungssystemen und zur graphischen Darstellung der erhaltenen Funktionen im Zusammenhang mit der Validierung zu verwenden und erst im Anschluss die Blackbox „Gleichungslöser“ zu öffnen, das Gaußverfahren zu thematisieren und für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Werkzeuge durchzuführen.

• interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionenscharen	Über freie Parameter (aus unterbestimmten Gleichungssystemen) werden Lösungsscharen erzeugt und deren Elemente hinsichtlich ihrer Eignung für das Modellierungsproblem untersucht und beurteilt. An innermathematischen „Steckbriefen“ werden Fragen der Eindeutigkeit der Modellierung und der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen untersucht. *Zur Förderung besonders leistungsstarker Schülerinnen und Schüler bietet es sich an, sie selbstständig über anspruchsvolle mathematische Inhalte forschen und referieren zu lassen.*

Unterrichtsvorhaben Q1-VII

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus […] mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)*
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
- wählen begründet eine geeignete Darstellungsform aus *(Produzieren)*
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
- dokumentieren Arbeitsschritte nachvollziehbar *(Produzieren)*
  erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Von der Änderungsrate zum Bestand (Q-LK-A3)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Produktsummen im Kontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe • deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext • skizzieren zu einer gegebenen Randfunktion die zugehörige Flächeninhaltsfunktion	*Hinweis: Auch im Leistungskurs bilden eigene anschauliche Erfahrungen ein gutes Fundament für den weiteren Begriffsaufbau. Deshalb hat sich die Fachkonferenz für einen ähnlichen Einstieg in die Integralrechnung im Leistungskurs entschieden wie im Grundkurs. Er unterscheidet sich ggf. durch etwas komplexere Aufgaben von der Einführung im Grundkurs.* Das Thema ist komplementär zur Einführung der Änderungsraten. Deshalb sollten hier Kontexte, die schon dort genutzt wurden, wieder aufgegriffen werden (Geschwindigkeit – Weg, Zuflussrate von Wasser – Wassermenge). Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert, auch das Drehen von Videos in denen sich die Schülerinnen und Schüler neue Inhalte selbst erklären, sind denkbar.

Unterrichtsvorhaben Q1-VIII:

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-LK-A4)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Vermutungen auf *(Vermuten)*
- unterstützen Vermutungen beispielgebunden *(Vermuten)*
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*
- verknüpfen Argumente zu Argumentationsketten *(Begründen)*
- erklären vorgegebene Argumentationen und mathematische Beweise *(Begründen)*
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können (*Beurteilen)*

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen […] digitale Werkzeuge *[Erg. Fachkonferenz: Tabellenkalkulation und Funktionenplotter]* zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum …
  … Messen von Flächeninhalten zwischen Funktionsgraph und Abszisse
  … Ermitteln des Wertes eines bestimmten Integrals

Zeitbedarf: 20 Std.

Thema: *Von der Randfunktion zur Integralfunktion (Q-LK-A4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs • erläutern den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Integralfunktion • deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen • nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen • begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs • bestimmen Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen • bestimmen Integrale numerisch […] • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion	Schülerinnen und Schüler sollen hier (wieder-)entdecken, dass die Bestandsfunktion eine Stammfunktion der Änderungsrate ist. Dazu kann ggf. das im vorhergehenden Unterrichtsvorhaben (vgl. Thema Q-LK-A3) entwickelte numerische Näherungsverfahren auf den Fall angewendet werden. Fragen, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, geben Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Da der Rekonstruktionsprozess auch bei einer abstrakt gegebenen Randfunktion möglich ist, wird für Bestandsfunktionen der Fachbegriff Integralfunktion eingeführt und der Zusammenhang zwischen Rand- und Integralfunktion im Hauptsatz formuliert (ggf. auch im Lehrervortrag). Die Regeln zur Bildung von Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbstständig erarbeitet. Bei der Berechnung der Flächeninhalte zwischen Graphen werden die Schnittstellen in der Regel numerisch mit dem GTR bestimmt. Komplexere Übungsaufgaben sollten am Ende des Unterrichtsvorhabens bearbeitet werden, um Vernetzungen mit den Kompetenzen der bisherigen Unterrichtsvorhaben (Funktionsuntersuchungen, Aufstellen von Funktionen aus Bedingungen) herzustellen. In den Anwendungen steht mit dem Hauptsatz neben dem numerischen Verfahren ein alternativer Lösungsweg zur Berechnung von Produktsummen zur Verfügung. Davon abgegrenzt wird die Berechnung von Flächeninhalten, bei der auch

• bestimmen Flächeninhalte und Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen, mit Hilfe von bestimmten und uneigentlichen Integralen	Intervalladditivität und Linearität (bei der Berechnung von Flächen zwischen Kurven) thematisiert werden. Bei der Berechnung der Volumina wird stark auf Analogien zur Flächenberechnung verwiesen. Beispielhaft wird das Vorgehen mit Hilfe von Wackelpudding mittels Zylinder, Modellierung und Kreisscheiben anschaulich deutlich gemacht.

Unterrichtsvorhaben Q2-I:

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A5)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. systematisches Probieren, Darstellungswechsel, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme)*(Lösen)*
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  … zielgerichteten Variieren der Parameter von Funktionen
  … grafischen Messen von Steigungen
- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge und wählen diese gezielt aus
- nutzen mathematische Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen

Zeitbedarf: 20 Std.

Thema: *Natürlich: Exponentialfunktionen und Logarithmus (Q-LK-A5)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler*	*Zu Beginn des Unterrichtsvorhabens empfiehlt sich eine Auffrischung der bereits in der Einführungsphase erworbenen Kompetenzen durch eine arbeitsteilige Untersuchung verschiedener Kontexte in Gruppenarbeit mit Präsentation (Wachstum und Zerfall).*
• beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen und begründen die besondere Eigenschaft der natürlichen Exponentialfunktion	Die Eigenschaften einer allgemeinen Exponentialfunktion zusammengestellt. Der GTR unterstützt dabei die Klärung der Bedeutung der verschiedenen Parameter und die Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. In einem Tabellenkalkulationsblatt wird für immer kleinere h das Verhalten des Differenzenquotienten beobachtet. Umgekehrt suchen die Lernenden zu einem gegebenen Ableitungswert die zugehörige Stelle.

• bilden die Ableitungen weiterer Funktionen:
    o natürliche Exponentialfunktion
    o Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis
    o natürliche Logarithmusfunktion
	Abschließend wird noch die Basis variiert. Dabei ergibt sich quasi automatisch die Frage, für welche Basis Funktion und Ableitungsfunktion übereinstimmen.

• nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Stammfunktion der Funktion: $x \rightarrow 1/x$.	Umkehrprobleme im Zusammenhang mit der natürlichen Exponentialfunktion werden genutzt, um den natürlichen Logarithmus zu definieren und damit auch alle Exponentialfunktionen auf die Basis e zurückzuführen. Mit Hilfe der schon bekannten Kettenregel können dann auch allgemeine Exponentialfunktionen abgeleitet werden.
• nutzen die natürliche Logarithmusfunktion als Umkehrfunktion der natürlichen Exponentialfunktion	*Optional:* Eine Vermutung zur Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird graphisch geometrisch mit einem DGS als Ortskurve gewonnen und anschließend mit der Kettenregel bewiesen.

Unterrichtsvorhaben Q2-II

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A6)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Sachsituationen zu *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*
  reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

Zeitbedarf: 20 Std.

Thema: *Modellieren (nicht nur) mit Exponentialfunktionen (Q-LK-A6)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen und vergleichen die Qualität der Modellierung exemplarisch mit einem begrenzten Wachstum • bestimmen Integrale […] mithilfe von gegebenen oder Nachschlagewerken entnommenen Stammfunktionen und mithilfe von gegebenen Stammfunktionen und numerisch, auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge • ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion	Im Zusammenhang mit der Modellierung von Wachstumsprozessen durch natürliche Exponentialfunktionen mit linearen Exponenten wird die Kettenregel eingeführt, um auch (hilfsmittelfrei) Ableitungen für die entsprechenden Funktionsterme bilden zu können. An mindestens einem Beispiel sollte auch ein beschränktes Wachstum untersucht werden. An Beispielen von Prozessen, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (z.B. Medikamente, Fieber, Pflanzen), wird eine Modellierung durch Produkte von ganzrationalen Funktionen und Exponentialfunktionen einschließlich deren Verhalten für betragsgroße Argumente erarbeitet. Auch in diesen Kontexten ergeben sich Fragen, die erfordern, dass aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamteffekt geschlossen wird. Weitere Kontexte bieten Anlass zu komplexen Modellierungen mit Funktionen anderer Funktionenklassen, insbesondere unter Berücksichtigung von Parametern, für die Einschränkungen des Definitionsbereiches oder Fallunterscheidungen vorgenommen werden müssen. Vernetzungsmöglichkeiten mit der Stochastik sollten aufgegriffen werden (z. B. Gaußsche Glockenkurve – sofern zu diesem Zeitpunkt bereits behandelt).

Analytische Geometrie und Lineare Algebra Leistungskurs

Unterrichtsvorhaben Q1-III:

Thema: *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-LK-G1)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung *(Validieren)*

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen Geodreiecke, geometrische Modelle und Dynamische-Geometrie-Software
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  … grafischen Darstellen von Ortsvektoren, Vektorsummen und Geraden
  … Darstellen von Objekten im Raum

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Beschreibung von Bewegungen und Schattenwurf mit Geraden (Q-LK-G1)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar	Lineare Bewegungen werden z. B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben und ggf.dynamisch mit DGS dargestellt. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen werden. *Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z. B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden.* Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie die Berechnung von Schnittpunkten mit den Grundebenen sollen auch hilfsmittelfrei durchgeführt werden. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden. Auf dieser Grundlage können z. B. Schattenwürfe von Gebäuden in Parallel- und Zentralprojektion auf eine der Grundebenen berechnet und zeichnerisch dargestellt werden.

<u>Unterrichtsvorhaben Q1-IV:</u>

Thema*:* *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
- analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Die Welt vermessen – das Skalarprodukt und seine ersten Anwendungen (Q-LK-G2)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es	Das Skalarprodukt wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Durch eine Zerlegung in parallele und orthogonale Komponenten wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dies wird zur Einführung des Winkels über den Kosinus genutzt (alternativ zu einer Herleitung aus dem Kosinussatz). *Weiter Bedeutungen des Skalarproduktes können bei Bedarf vorgestellt werden.*
• untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung)	Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für (im Sinne des Problemlösens offen angelegte) exemplarische geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte (z. B. Gebäude) bezogen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt.
• bestimmen Abstände zwischen Punkten und Geraden [...]	In Anwendungskontexten (z. B. Vorbeiflug eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes) wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen. Eine Vernetzung mit Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung bietet sich an.

Unterrichtsvorhaben Q1-V:

Thema*:* *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G3)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)*
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)*
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Ebenen als Lösungsmengen von linearen Gleichungen und ihre Beschreibung durch Parameter (Q-LK-G3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • deuten das Skalarprodukt geometrisch und berechnen es • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	Im Sinne verstärkt wissenschaftspropädeutischen Arbeitens wird folgender anspruchsvoller, an Q-LK-G2 anknüpfender Weg vorgeschlagen: Betrachtet wird die Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen ($\vec{a} \ = \ 0$) wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform, Hesse-Normalenform als Sonderformen der Normalenform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt, verglichen und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Zur Veranschaulichung der Lage von Ebenen wird eine räumliche Geometriesoftware verwendet. Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. So können auch anspruchsvollere Modellierungsaufgaben gestellt werden. Ein Wechsel zwischen Koordinatenform und Parameterform der Ebene ist über die drei Achsenabschnitte möglich. Alternativ wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmt.

Unterrichtsvorhaben Q1-VI:

Thema: *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her (Ober-/Unterbegriff) *(Begründen)*
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
- berücksichtigen vermehrt logische Strukturen (notwendige/hinreichende Bedingung, Folgerungen/Äquivalenz, Und-/Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen) *(Begründen)*
- überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

Kommunizieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erläutern mathematische Begriffe in theoretischen und in Sachzusammenhängen *(Rezipieren)*
- verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang *(Produzieren)*
- wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen *(Produzieren)*
- erstellen Ausarbeitungen und präsentieren sie *(Produzieren)*
  vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität *(Diskutieren)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Lagebeziehungen und Abstandsprobleme bei geradlinig bewegten Objekten (Q-LK-G4)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren den Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden […] • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	Die Berechnung des Schnittpunkts zweier Geraden ist eingebettet in die Untersuchung von Lagebeziehungen. Die Existenzfrage führt zur Unterscheidung der vier möglichen Lagebeziehungen. Als ein Kontext kann die Modellierung von Flugbahnen (Kondensstreifen) aus Thema Q-LK-G1 wieder aufgenommen werden, insbesondere mit dem Ziel, die Frage des Abstandes zwischen Flugobjekten im Unterschied zur Abstandsberechnung zwischen den Flugbahnen zu vertiefen. Hier bietet sich wiederum eine Vernetzung mit den Verfahren der Analysis zur Abstandsminimierung an. Die Berechnung des Abstandes zweier Flugbahnen kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nachträglich aus dem Abstand bestimmt werden müssen. In der Rückschau sollten die Schüler nun einen Algorithmus entwickeln, um über die Lagebeziehung zweier Geraden zu entscheiden. Flussdiagramme und Tabellen sind ein geeignetes Mittel, solche Algorithmen darzustellen. Die Schülerinnen und Schüler können selbst solche Darstellungen entwickeln, auf Lernplakaten dokumentieren, präsentieren, vergleichen und in ihrer Brauchbarkeit beurteilen. In diesem Teil des Unterrichtsvorhabens sollten nicht nur logische Strukturen reflektiert, sondern auch Unterrichtsformen gewählt werden, bei denen Kommunikationsprozesse im Team unter Verwendung der Fachsprache angeregt werden.

Unterrichtsvorhaben Q2-VI:

Thema: *Untersuchungen an Polyedern (Q-LK-G5)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
- erkennen und formulieren einfache und komplexe mathematische Probleme *(Erkunden)*
- analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. […] Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, [...]) *(Lösen)*
- wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren zur Problemlösung aus *(Lösen)*
- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen
… Durchführen von Operationen mit Vektoren und Matrizen

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Untersuchungen an Polyedern (Q-LK-G5)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen lineare Gleichungssysteme in Matrix-Vektor-Schreibweise dar • beschreiben den Gauß-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme • wenden den Gauß-Algorithmus ohne digitale Werkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an • interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen […] zwischen Geraden und Ebenen • berechnen (Schnittpunkte von Geraden sowie) Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen und können auf reale Objekte bezogen werden. Wo möglich, werden auch elementargeometrische Lösungswege als Alternative aufgezeigt Die Bestimmung von Längen und Winkeln setzt das Thema Q-LK-G2 direkt fort. Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene erlauben Rückschlüsse auf ihre Lagebeziehung. Abstände von Punkten zu Geraden (Q-LK-G2) und zu Ebenen (Q-LK-G3) ermöglichen es z. B., die Fläche eines Dreiecks oder die Höhe und das Volumen einer Pyramide zu bestimmen. Abgesehen von der Abstandsberechnung zwischen Geraden (erst in Q-LK-G5) müssen weitere Formen der Abstandsberechnungen nicht systematisch abgearbeitet werden, sie können bei Bedarf im Rahmen von Problemlöseprozessen in konkrete Aufgaben integriert werden. Das Gauß-Verfahren soll anknüpfend an das Thema Q-LK-A2 im Zusammenhang mit der Berechnung von Schnittfiguren oder bei der Konstruktion regelmäßiger Polyeder vertieft werden. Weiter bietet der Einsatz des GTR Anlass, z. B. über die Interpretation der trigonalisierten Koeffizientenmatrix die Dimension des Lösungsraumes zu untersuchen. Die Vernetzung der geometrischen Vorstellung und der algebraischen Formalisierung soll stets deutlich werden. In diesem Unterrichtsvorhaben wird im Sinne einer wissenschaftspropädeutischen Grundbildung besonderer Wert gelegt auf eigenständige Lernprozesse bei der Aneignung eines begrenzten Stoffgebietes sowie bei der Lösung von problemorientierten Aufgaben.

Unterrichtsvorhaben Q2-VII:

Thema*:* *Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q-LK-G6)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Verallgemeinern) *(Lösen)*
- führen einen Lösungsplan zielgerichtet aus *(Lösen)*
- vergleichen verschiedene Lösungswege bezüglich Unterschieden und Gemeinsamkeiten *(Reflektieren)*
- beurteilen und optimieren Lösungswege mit Blick auf Richtigkeit und Effizienz *(Reflektieren)*
- analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern *(Reflektieren)*
- variieren Fragestellungen auf dem Hintergrund einer Lösung *(Reflektieren)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Strategieentwicklung bei geometrischen Problemsituationen und Beweisaufgaben (Q-LK-G6)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • stellen Geraden in Parameterform dar • stellen Ebenen in Koordinaten- und in Parameterform dar • stellen geradlinig begrenzte Punktmengen in Parameterform dar • untersuchen Lagebeziehungen zwischen Geraden und zwischen Geraden und Ebenen • berechnen Schnittpunkte von Geraden sowie Durchstoßpunkte von Geraden mit Ebenen und deuten sie im Sachkontext • untersuchen mit Hilfe des Skalarprodukts geometrische Objekte und Situationen im Raum (Orthogonalität, Winkel- und Längenberechnung) • stellen Ebenen in Normalenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum • bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen	*Hinweis: Angesichts des begrenzten Zeitrahmens ist es wichtig, den Fokus der Unterrichtstätigkeit nicht auf die Vollständigkeit einer „Rezeptsammlung“ und deren hieb- und stichfeste Einübung zu allen denkbaren Varianten zu legen, sondern bei den Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln, die sie in die Lage versetzen, problemhaltige Aufgaben zu bearbeiten und dabei auch neue Anregungen zu verwerten.* Bei der Durchführung der Lösungswege können die Schülerinnen und Schüler auf das entlastende Werkzeug des GTR zurückgreifen, jedoch steht dieser Teil der Lösung hier eher im Hintergrund und soll sogar bei aufwändigeren Problemen bewusst ausgeklammert werden. Bei Beweisaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler Formalisierungen in Vektorschreibweise rezipieren und ggf. selbst vornehmen. Die erworbenen Kompetenzen im Problemlösen sollen auch in Aufgaben zum Einsatz kommen, die einen Kontextbezug enthalten, so dass dieses Unterrichtsvorhaben auch unmittelbar zur Abiturvorbereitung überleitet bzw. zum Zweck der Abiturvorbereitung noch einmal wiederaufgenommen werden soll.

Stochastik Leistungskurs

<u>Unterrichtsvorhaben Q1-IX:</u>

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler

- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

Zeitbedarf: 5 Std.

Thema: *Von stochastischen Modellen, Zufallsgrößen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und ihren Kenngrößen (Q-LK-S1)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • untersuchen Lage- und Streumaße von Stichproben • erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen	Anhand verschiedener Glücksspiele wird zunächst der Begriff der Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung des Mittelwertes bei empirischen Häufigkeitsverteilungen wird der Erwartungswert einer Zufallsgröße definiert. Das Grundverständnis von Streumaßen wird durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots in der Sekundarstufe I reaktiviert. Über eingängige Beispiele von Verteilungen mit gleichem Mittelwert aber unterschiedlicher Streuung wird die Definition der Standardabweichung als mittlere quadratische Abweichung im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen motiviert; anhand gezielter Veränderungen der Verteilung werden die Auswirkungen auf deren Kenngrößen untersucht und interpretiert.

Unterrichtsvorhaben Q1-X:

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulliexperimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- treffen Annahmen und nehmen begründet Vereinfachungen einer realen Situation vor *(Strukturieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
- nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]

verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
… Generieren von Zufallszahlen
… Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen
… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Treffer oder nicht? – Bernoulli-Experimente und Binomialverteilungen (Q-LK-S2)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • verwenden Bernoulliketten zur Beschreibung entsprechender Zufalls-experimente	Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Durch Vergleich mit dem „Ziehen ohne Zurücklegen“ wird geklärt, dass die Anwendung des Modells ‚Bernoullikette’ eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d. h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.
• erklären die Binomialverteilung im Kontext und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten	Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation an (in Verbindung mit TI-Nspire CAS)
• beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt dabei durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung für ein zweistufiges Bernoulliexperiment plausibel gemacht werden. Auf eine allgemeingültige Herleitung wird verzichtet.
• bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von Zufallsgrößen […]	Durch Erkunden wird festgestellt, dass unabhängig von n und p ca. 68% der Ergebnisse in der 1σ -Umgebung des Erwartungswertes liegen. *Hinweis: Der Einsatz des GTR zur Berechnung singulärer sowie kumulierter Wahrscheinlichkeiten ermöglicht den Verzicht auf stochastische Tabellen und eröffnet aus der numerischen Perspektive den Einsatz von Aufgaben in realitätsnahen Kontexten.*

Unterrichtsvorhaben Q1-XI:

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*

Prozessbezogene Kompetenzen:

Problemlösen

Die Schülerinnen und Schüler

- analysieren und strukturieren die Problemsituation *(Erkunden)*
- wählen heuristische Hilfsmittel (z. B. Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren) aus, um die Situation zu erfassen *(Erkunden)*
- erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (z. B. Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Verallgemeinern) *(Lösen)*
- interpretieren Ergebnisse auf dem Hintergrund der Fragestellung *(Reflektieren)*

Werkzeuge nutzen

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen grafikfähige Taschenrechner und Tabellenkalkulationen […]

verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum

… Variieren der Parameter von Binomialverteilungen

… Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen

… Berechnen der Kennzahlen von Binomialverteilungen (Erwartungswert, Standardabweichung)

… Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten Zufallsgrößen

Zeitbedarf: 5 Std.

Thema: *Untersuchung charakteristischer Größen von Binomialverteilungen (Q-LK-S3)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf Binomialverteilungen und ihre graphische Darstellung • bestimmen den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von (binomialverteilten) Zufallsgrößen und treffen damit prognostische Aussagen • nutzen die σ-Regeln für prognostische Aussagen • nutzen Binomialverteilungen und ihre Kenngrößen zur Lösung von Problemstellungen	Eine Visualisierung der Verteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung des GTR. Während sich die Berechnung des Erwartungswertes erschließt, kann die Formel für die Standardabweichung induktiv entdeckt werden: In einer Tabellenkalkulation wird bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit multipliziert. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$. Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch experimentelle Daten abgeleitet. Es wird benutzt, um Prognoseintervalle anzugeben, den notwendigen Stichprobenumfang für eine vorgegebene Genauigkeit zu bestimmen und um das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu präzisieren.

Unterrichtsvorhaben Q2-III:

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S4)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erfassen und strukturieren [...] komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- übersetzen [...] komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beurteilen die Angemessenheit aufgestellter (ggf. konkurrierender) Modelle für die Fragestellung *(Validieren)*
- reflektieren die Abhängigkeit einer Lösung von den getroffenen Annahmen *(Validieren)*

Problemlösen
Die Schülerinnen und Schüler
- erkennen Muster und Beziehungen *(Erkunden)*
- entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege *(Lösen)*
- wählen Werkzeuge aus, die den Lösungsweg unterstützen *(Lösen)*

Werkzeuge nutzen
Die Schülerinnen und Schüler
- verwenden verschiedene digitale Werkzeuge zum
  … Generieren von Zufallszahlen
  … Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
  … Erstellen der Histogramme von Binomialverteilungen
  ... Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufalls-
  größen
- nutzen digitale Hilfsmittel und digitale Werkzeuge zum Erkunden und Recherchieren, Berechnen und Darstellen
- entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge, wählen sie gezielt aus und nutzen sie zum Erkunden …, Berechnen und Darstellen
  reflektieren und begründen die Möglichkeiten und Grenzen mathematischer Hilfsmittel und digitaler Werkzeuge

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Ist die Glocke normal? (Q-LK-S4)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion • untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen • beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion (Gaußsche Glockenkurve)	Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dementsprechend beschließt die Fachkonferenz den Einstieg in dieses Unterrichtsvorhaben über die Untersuchung von Summenverteilungen. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich Mittelwert und Streuung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang. Da auf dem GTR die Normalverteilung einprogrammiert ist, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. Q-LK-A3). Die Visualisierung erfolgt mithilfe des GTR. Theoretisch ist von Interesse, dass es sich bei der Gaußschen Glockenkurve um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion (Gaußsche Integralfunktion) kein Term angegeben werden kann.

<u>Unterrichtsvorhaben Q2-IV:</u>

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung *(Strukturieren)*
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle *(Mathematisieren)*
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells *(Mathematisieren)*
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation *(Validieren)*

Kommunizieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen Texten und Darstellungen, aus mathematischen Fachtexten sowie aus Unterrichtsbeiträgen *(Rezipieren)*
- formulieren eigene Überlegungen und beschreiben eigene Lösungswege *(Produzieren)*

  führen Entscheidungen auf der Grundlage fachbezogener Diskussionen herbei *(Diskutieren)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Signifikant und relevant? – Testen von Hypothesen (Q-LK-S5)*	
Zu entwickelnde Kompetenzen	**Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen**
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • interpretieren Hypothesentests bezogen auf den Sachkontext und das Erkenntnisinteresse • beschreiben und beurteilen Fehler 1. und 2. Art	Zentral ist das Verständnis der Idee des Hypothesentests, d. h. mit Hilfe eines mathematischen Instrumentariums einzuschätzen, ob Beobachtungen auf den Zufall zurückzuführen sind oder nicht. Ziel ist es, die Wahrscheinlichkeit von Fehlentscheidungen möglichst klein zu halten. Die Logik des Tests soll dabei an datengestützten gesellschaftlich relevanten Fragestellungen, z. B. Häufungen von Krankheitsfällen in bestimmten Regionen oder alltäglichen empirischen Phänomenen (z. B. Umfrageergebnisse aus dem Lokalteil der Zeitung) entwickelt werden, sie wird abschließend in einem ‚Testturm' visualisiert. Im Rahmen eines realitätsnahen Kontextes werden folgende Fragen diskutiert: - Welche Hypothesen werden aufgestellt? Wer formuliert diese mit welcher Interessenlage? - Welche Fehlentscheidungen treten beim Testen auf? Welche Konsequenzen haben sie? Durch Untersuchung und Variation gegebener Entscheidungsregeln werden die Bedeutung des Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Fehlentscheidungen 1. und 2. Art zur Beurteilung des Testverfahrens erarbeitet.

Unterrichtsvorhaben Q2-V:

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)*

Prozessbezogene Kompetenzen:
Modellieren
Die Schülerinnen und Schüler
- erfassen und strukturieren zunehmend komplexe Sachsituationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung (Strukturieren)
- übersetzen zunehmend komplexe Sachsituationen in mathematische Modelle (Mathematisieren)
- erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten eine Lösung innerhalb des mathematischen Modells (Mathematisieren)
- beziehen die erarbeitete Lösung wieder auf die Sachsituation (Validieren)

Argumentieren
Die Schülerinnen und Schüler
- präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur *(Vermuten)*
- nutzen mathematische Regeln bzw. Sätze und sachlogische Argumente für Begründungen *(Begründen)*
- stellen Zusammenhänge zwischen Begriffen her *(Begründen)*

  überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können *(Beurteilen)*

Zeitbedarf: 10 Std.

Thema: *Von Übergängen und Prozessen (Q-LK-S6)*

Zu entwickelnde Kompetenzen	Vorhabenbezogene Absprachen und Empfehlungen
Inhaltsbezogene Kompetenzen: *Die Schülerinnen und Schüler* • beschreiben stochastische Prozesse mithilfe von Zustandsvektoren und stochastischen Übergangsmatrizen • verwenden die Matrizenmultiplikation zur Untersuchung stochastischer Prozesse (Vorhersage nachfolgender Zustände, numerisches Bestimmen sich stabilisierender Zustände)	*Die Behandlung stochastischer Prozesse sollte genutzt werden, um zentrale Begriffe aus Stochastik (Wahrscheinlichkeit, relative Häufigkeit) und Analysis (Grenzwert) mit Begriffen und Methoden der Linearen Algebra (Vektor, Matrix, lineare Gleichungssysteme) zu vernetzen. Schülerinnen und Schüler modellieren dabei in der Realität komplexe Prozesse, deren langfristige zeitliche Entwicklung untersucht und als Grundlage für Entscheidungen und Maßnahmen genutzt werden kann.* Der Auftrag an Schülerinnen und Schüler, einen stochastischen Prozess graphisch darzustellen, führt in der Regel zur Erstellung eines Baumdiagramms, dessen erste Stufe den Ausgangszustand beschreibt. Im Zusammenhang mit der Interpretation der Pfadregeln als Gleichungssystem können sie daraus die Matrix-Vektor-Darstellung des Prozesses entwickeln. Untersuchungen in unterschiedlichen realen Kontexten führen zur Entwicklung von Begriffen zur Beschreibung von Eigenschaften stochastischer Prozesse (Potenzen der Übergangsmatrix, Grenzmatrix, stabile Verteilung, absorbierender Zustand). Hier bietet sich eine Vernetzung mit der Linearen Algebra hinsichtlich der Betrachtung linearer Gleichungssysteme und ihrer Lösungsmengen an.